Superficies elípticas racionales

Benjamín Macías Quezada

19 de mayo de 2022

Resumen

Esta es una versión escrita de una charla para el Seminario de Teoría de Números de la PUC. Partiremos recordando nuestros objetos de estudio junto con algunos resultados que hemos revisado a la fecha. Posteriormentem estudiaremos un par de fórmulas para cálculas algunos invariantes de superficies elípticas, y luego nos especializaremos al caso de superficies racionales, de las que podremos calcular explícitamente su característica de Euler, de Euler–Poincaré, y su número de Picard aprovechando la fibración elíptica.

Índice

1. Introducción

Usaremos la misma notación que Matthias Schütt y Tetsuji Shioda en su libro *Mordell–Weil Lattices*, [SS19]. A saber, dada una variedad proyectiva X, denotamos $e(X)$ a su característica de Euler–Poincaré topológica, y dado un haz coherente $\mathscr{F}$ en un esquema propio, denotamos como $\chi(\mathscr{F})$ a su característica de Euler. En particular, si $\mathscr{O}_X$ es el haz estructural de X, su característica de Euler $\chi(\mathscr{O}_X)$ también será denotada como $\chi(X)$. S siempre denotará una superficie suave proyectiva, y se especificará la fibración en caso de ser elíptica. La teoría fundamental de superficies algebraicas que se utilizará libremente se puede encontrar en [SS19, Ch. 4].

Nuestro objeto de estudio son las *superficies elípticas*, que son superficies suaves proyectivas equipadas con alguna *fibración elíptica*. Estas son morfismos (sobreyectivos, con fibras conexas) a alguna curva suave $\pi\colon S \to C$ de modo que sus fibras son curvas suaves proyectivas de género 1, y solo finitas son singulares (las llamadas *fibras malas*). La teoría que hemos revisado hasta este momento en el seminario se puede encontrar en [SS19, Ch. 5].

También seguimos las convenciones de [SS19], y solicitamos que S sea *relativamente minimal* (ie., que no contenga curvas (-1)). También, asumimos que siempre hay una *sección* distinguida (ie. un morfismo $\sigma_0\colon C \to S$ tal que $f \circ \sigma_0 = \mathrm{id}_C$), de modo que identificamos un punto distinguido en cada fibra, por lo que de hecho las fibras serán curvas elípticas. En este contexto, las secciones forman un grupo que denotamos como $\mathrm{MW}(S, \pi)$. La operación en este grupo se puede encontrar en [SS19, Ch. 5.6.1].

Las fibras malas son de particular interés pues acarrean mucha información de la superficie en cuestión. Un primer resultado es:

Teorema 1 (Lang–Néron). *Si la superficie elíptica* $\pi\colon S \to C$ *tiene fibras malas, entonces* $\mathrm{MW}(S, \pi)$ *es finitamente generado.*

En la siguiente sección veremos cómo se presentan algunos invariantes en presencia de una fibración elíptica con fibras malas. Motivado por este interés, Néron y Kodaira dieron una clasificación de estas fibras de forma independiente (cf. [Kod60, Kod64, Né64]), y posteriormente Tate entregó un algoritmo que permite identificar el tipo de fibra mala en la clasificación de Néron–Kodaira (cf. [Tat75]).

2. Invariantes de superficies elípticas

Las superficies elípticas $\pi\colon S \to \mathbb{P}^1$ que tienen $v(a_4) < 4$ y $v(a_6) < 6$ admiten una forma de Weierstrass minimal definida globalmente. Definimos n el menor entero tal que $\deg(a_i) < ni$ para cada i. Este número resulta coincidir con el *género aritmético* $p_a := \chi(\mathscr{O}_S) - 1$, y nos indica dónde cae la superficie elíptica en la clasificación de Enriques–Kodaira:

Teorema 2 (Clasificación de Enriques–Kodaira). *Dada una superficie algebraica S, todo modelo minimal S' de S cae en alguno de los siguientes casos:*

$\kappa(S)$	Nombre genérico para S'
-1	Racional, reglada
0	Abeliana, K3, Enriques, Bielíptica
1	Elíptica
> 2	de tipo general

Si además la superficie es elíptica $\pi\colon S \to \mathbb{P}^1$, los modelos minimales son:

$\kappa(S)$	p_a	Nombre genérico para S'
-1	1	Elíptica racional
0	2	K3
1	> 2	Honestamente elíptica

2.1. Característica y número de Euler

Para una superficie elíptica $\pi\colon S \to C$ hay una fórmula para $e(S)$ dependiente del número de Euler de cada fibra y del número de ramificación salvaje en cada punto. En cada fibra $F_v := \pi^{-1}(v)$, con $v \in C$, se tiene que

$$e(F_v) := \begin{cases} 0 & \text{si } F_v \text{ es suave,} \\ m_v & \text{si } F_v \text{ es multiplicativa,} \\ m_v + 1 & \text{si } F_v \text{ es aditiva.} \end{cases}$$

Sabiendo esto, podemos calcular $e(S)$ a través de:

Teorema 3. *Dada $\pi\colon S \to C$ una superficie elíptica, se tiene que*

$$e(S) = \sum_{v \in C} e(F_v) + \delta_v.$$

Esta suma es finita porque casi todas las fibras son suaves (ie. casi todos los sumandos son 0). El índice de ramificación salvaje es 0 salvo en características 2 y 3, y cuando la fibra mala es aditiva.

En particular, $e(S)$ siempre es positivo, por lo que de la fórmula de Noether, se deduce que

$$\chi(S) = \frac{1}{12} e(S),$$

también lo es.

2.2. Divisor y bundle canónicos

Recordemos que en una superficie S, en el haz Ω_S^1 de las 1-formas diferenciales en S, el producto exterior $\wedge$ define un haz invertible

$$\omega_S := \wedge^2 \Omega_S^1,$$

llamado el bundle canónico de S, que tiene asociado de forma canónica un divisor de Cartier $K_S \in \operatorname{Pic}(S)$, llamado el divisor canónico de S. Por ejemplo, $K_{\mathbb{P}^2} = -3L$, donde L es una recta. En el caso de superficies elípticas, el bundle canónico tiene una descripción dependiente de la fibración y sus fibras malas:

Teorema 4 (Fórmula para el bundle canónico). *El bundle canónico de una superficie elíptica $\pi\colon S \to C$ es dado por*

$$\omega_S = \pi^*(\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1}),$$

donde $\mathcal{L}$ es un bundle de rectas de grado $-\chi(S)$ en C. En particular, se puede deducir que

$$K_s \approx [2p_g(C) - 2 + \chi(S)]F,$$

donde F es un fibra, y que $K_S^2 = 0$.

Por ejemplo, si la curva de base fuese $C = \mathbb{P}^1$, ésta tiene género $p_g(\mathbb{P}^1) = 0$, y la fórmula anterior indica que

$$K_S = (-2 + \chi(S))F.$$

3. Superficies elípticas racionales

Las superficies racionales son aquellas birracionales a $\mathbb{P}^2$. Ahora, vamos a estudiar superficies racionales y elípticas. Como primera consideración, siempre podemos asumir que la curva base es $\mathbb{P}^1$ gracias a un teorema de Lüroth.

3.1. Invariantes de superficies elípticas racionales

Recordemos que q y p_g son invariantes birracionales. Como $q(\mathbb{P}^2) = p_g(\mathbb{P}_2) = 0$, se tiene que $q(S) = p_g(S) = 0$. Esto, más el hecho que $\chi = p_g - q + 1$, prueba que:

Proposición 5. *Toda superficie elíptica racional S tiene $\chi(S) = 1$.*

Por otro lado, la fórmula de Noether indica que $e(S) + 12K_S^2 = 12\chi(S)$, por lo que la proposición anterior y la fórmula para el bundle canónico en el caso elíptico prueban que:

Proposición 6. *Toda superficie elíptica racional tiene $e(S) = 12$.*

Otro invariante relevante es el *grupo de Néron–Severi* de una superficie S,

$$\operatorname{NS}(S) := \operatorname{div}(S)/\approx,$$

donde $\approx$ es la relación de *equivalencia algebraica*. Intuitivamente, dos divisores son algebraicamente equivalentes si podemos degenerar uno al otro. $\operatorname{NS}(S)$ es un grupo abeliano finitamente generado, y su rango se llama el *número de Picard* de S, denotado $\rho(S) := \operatorname{rk}(\operatorname{NS}(S))$. Por ejemplo, se puede probar que $\operatorname{NS}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$, por lo que $\rho(\mathbb{P}^n) = 1$.

Calculemos el número de Picard de S. Como no es invariante birracional, no podemos llegar y copiar el de $\mathbb{P}^2$. Esto es un inconveniente, pero no todo está perdido pues la diferencia $\lambda(S) = b_2(S) - \rho(S)$, llamada el *número de Lefschetz de S*, sí lo es. Sabemos que $\rho(\mathbb{P}^2) = 1 = b_2(\mathbb{P}^2)$, por lo que $\lambda(S) = 0$, y por tanto $b_2(S) = \rho(S)$. Recordemos que $e(S)$ es la suma alternada de los números de Betti, $e(S) = 2 - 2b_1(S) = b_2(S)$, lo que se traduce a que

$$12 = 2 - 2b_1 + \rho(S),$$

por lo que falta conocer el valor de $b_1(S)$ para obtener lo que queremos. Este número de Betti es el rango de la variedad abeliana $\operatorname{Pic}^0(S)$, que es trivial. Así:

Proposición 7. *Toda superficie elíptica racional tiene $\rho(S) = 10$.*

3.2. Pinceles de cúbicas

Dados $F, G \in k[X,Y,Z]$ homogéneos cúbicos coprimos, podemos considerar el pincel de cúbicas S definido por

$$sF + tG = 0, \quad [s:t] \in \mathbb{P}^1,$$

que de hecho corresponde a una superficie racional con $3^2 = 9$ puntos de base. Nos gustaría establecer una estructura de superficie elíptica. Para ello, consideremos el siguiente resultado:

Lema 8. *Si entre los puntos base del pincel S no hay tres colineales ni múltiples (ie., son todos distintos), las fibraciones de género uno $\pi\colon S \to \mathbb{P}^1$ tienen todas sus fibras irreducibles. En este caso, la fibración es elíptica.*

Por lo que bastaría encontrar una fibración de género uno $\pi\colon S \to \mathbb{P}^1$ para concluir lo deseado. Para esto, podemos considerar S como variedad proyectiva en $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, de modo que la proyección a $\mathbb{P}^2$ exhiba a la superficie como la explosión en los nueve puntos de base del pincel, lo queda una fibración de género uno $S \to \mathbb{P}^1$. Por el lema anterior:

Corolario 9. *Todo pincel de cúbicas con puntos de base distintos sin tres colineales admite una fibración elíptica $S \to \mathbb{P}^1$, es decir, se realiza como una superficie elíptica racional.*

La gracia de los pinceles de cúbicas, es que existe una suerte de conversa para el resultado anterior:

Teorema 10. *Todo superficie elíptica racional admite un modelo como pincel de cúbicas.*

Referencias

[Kod60] K. Kodaira, *On Compact Complex Analytic Surfaces, I*, Annals of Mathematics **71** (1960), no. 1, 111–152.

[Kod64] ———, *On Compact Analytic Surfaces: II*, Annals of Mathematics **77** (1964), no. 3, 563–626.

[Né64] André Néron, *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **21** (1964), 5–128 (fr). MR 31

[SS19] Matthias Schütt and Tetsuji Shioda, *Mordell–Weil Lattices*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer, Singapore, 2019.

[Tat75] J. Tate, *Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil*, Modular functions of one variable. IV. Proceedings of the international summer school, University of Antwerp, RUCA, July 17 – August 3, 1972, Berlin: Springer, 1975, pp. 33–52 (English).